

Chapitre I : Calcul Algébrique



Rédigé par Samy Youssoufine

7 janvier 2026



Table des matières

1	Sommes (Σ)	2
1.1	Généralités	2
1.2	Changement d'indice et sommes télescopiques	3
1.2.1	Changement d'indice	3
1.2.2	Sommes télescopiques	4
1.3	Sommes classiques	5
1.3.1	Identité remarquable et suite géométrique	5
1.3.2	Binôme de Newton	6
1.4	Sommes doubles	8
2	Produits (Π)	9
2.1	Définition et propriétés	9
2.2	Exercices sur les produits	10
3	Systèmes linéaires	12
3.1	Généralités	12
3.1.1	Définition d'un système	12
3.1.2	Résolution d'un système linéaire	13
3.2	Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n	14
3.3	Sous-espaces affines et structure des solutions	16
3.3.1	Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire	17
3.3.2	Exercices d'application	18

1 Sommes (Σ)

1.1 Généralités

☰ Définition 1.1.1.1

Soit I un ensemble fini non vide et $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de \mathbb{C} . La **somme** des éléments de cette famille est notée :

$$\sum_{i \in I} a_i$$

Si $I = \{0, 1, \dots, n\}$ (où $n \in \mathbb{N}$), alors on écrit :

$$\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

✓ Propriété 1.1.1.1 (*Linéarité de la somme*)

1. Additivité sur les ensembles disjoints : Si I et J sont deux ensembles finis tels que $I \cap J = \emptyset$, alors :

$$\sum_{k \in I \cup J} a_k = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{j \in J} a_j$$

2. Homogénéité : Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une constante (indépendante de l'indice de sommation i), alors :

$$\sum_{i \in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i \in I} a_i$$

3. Additivité : Pour deux familles $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$:

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

🔍 Preuve

La preuve repose sur les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition.

1. On pose $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ et $J = \{j_1, \dots, j_q\}$. Puisque $I \cap J = \emptyset$, l'union $I \cup J$ contient $p + q$ éléments distincts. La somme sur $I \cup J$ est donc $(a_{i_1} + \dots + a_{i_p}) + (a_{j_1} + \dots + a_{j_q})$, ce qui correspond à la somme des deux sommes.
2. C'est une simple factorisation : $\lambda a_1 + \dots + \lambda a_p = \lambda(a_1 + \dots + a_p)$. ■

→ **Conséquence 1.1.1.1**

1. *Relation de Chasles pour les sommes* : Si $1 \leq n < m$, alors :

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=n+1}^m a_i$$

2. *Somme d'une constante* :

$$\sum_{i \in I} \lambda = \lambda \cdot \text{card}(I)$$

En particulier, $\sum_{k=p}^n \lambda = \lambda \cdot (n - p + 1)$.

 **Exemple 1.1.1.1 (Sommes usuelles)**

1. $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=0}^n (2k+1) = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = n(n+1) + (n+1) = (n+1)^2$.

1.2 Changement d'indice et sommes télescopiques

1.2.1 Changement d'indice

 **Proposition 1.1.2.1**

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{C} . Pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=m}^n a_{k+p} = \sum_{j=m+p}^{n+p} a_j$$

Cette opération est appelée un **changement d'indice** (ou translation d'indice).

 **Remarque 1.1.2.1**

1. Un changement d'indice doit être une transformation affine ($k \mapsto ak + b$) pour préserver la nature "consécutives" des indices. Un changement non linéaire comme $k \mapsto k^2$ n'est pas valide.
2. La permutation des bornes est un cas particulier : $\sum_{k=1}^n a_{n-k} = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0 = \sum_{j=0}^{n-1} a_j$.

1.2.2 Sommes télescopiques

 **Proposition 1.1.2.2**

Pour une suite (a_k) , on a :

$$\sum_{k=p}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p$$

 **Preuve**

Le développement de la somme donne :

$$(a_{p+1} - a_p) + (a_{p+2} - a_{p+1}) + \dots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n)$$

Tous les termes intermédiaires s'annulent deux à deux, ne laissant que $-a_p$ et a_{n+1} .



 **Exemple 1.1.2.2**

1. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

On décompose en éléments simples : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. La somme devient télescopique :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

2. Calculer $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$.

On utilise l'expression conjuguée : $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1-k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.

$$T_n = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \sqrt{n+1} - 1$$

☞ **Remarque 1.1.2.2 (Télescopage à plusieurs pas)**

Pour une somme comme $\sum_k (a_{k+2} - a_k)$, on peut la décomposer pour faire apparaître des sommes télescopiques simples :

$$\sum_k (a_{k+2} - a_k) = \sum_k (a_{k+2} - a_{k+1} + a_{k+1} - a_k) = \sum_k (a_{k+2} - a_{k+1}) + \sum_k (a_{k+1} - a_k)$$

1.3 Sommes classiques

1.3.1 Identité remarquable et suite géométrique

★ **Théorème 1.1.3.1 (Identité de Bernoulli)**

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{Formule } a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

🔍 **Preuve**

On développe le membre de droite :

$$\begin{aligned} (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{j=1}^n a^j b^{n-j} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = (a^n + \sum_{j=1}^{n-1} a^j b^{n-j}) - (b^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k}) = a^n - b^n \end{aligned}$$

■

☞ **Remarque 1.1.3.3**

En posant $b = 1$ et $a \neq 1$, on retrouve la somme des termes d'une suite géométrique.

★ **Théorème 1.1.3.2 (Somme géométrique)**

Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

1.

$$\sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} n + 1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

2. Pour $p \leq n$:

$$\sum_{k=p}^n x^k = \begin{cases} n - p + 1 & \text{si } x = 1 \\ x^p \frac{1 - x^{n-p+1}}{1 - x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

1.3.2 Binôme de Newton

★ Théorème 1.1.3.3 (Formule du binôme de Newton)

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{Binôme de Newton } (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient binomial.

✔ Propriété 1.1.3.2 (Propriétés des coefficients binomiaux)

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2. **Symétrie** : Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
3. **Formule de Pascal** : Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

🔍 Preuve (Preuve du binôme par récurrence)

- **Initialisation** ($n = 0$) : $(a + b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. La formule est vraie.

► **Hérédité** : Supposons la formule vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
 &= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (\text{par H.R.}) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
 &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} \\
 &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \quad (\text{Formule de Pascal}) \\
 &= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
 \end{aligned}$$

La formule est vraie au rang $n+1$. ■

⚡ Exercice 1.1.3.1

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$.
3. Calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

🔍 Preuve (Solutions)

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.
2. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0$ pour $n \geq 1$.
3. On utilise la technique de la dérivation. Soit $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. Alors $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$. Pour $x=1$, on obtient $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$. ■

1.4 Sommes doubles

Définition 1.1.4.2

Soit une famille d'éléments $(a_{i,j})$ où $i \in I$ et $j \in J$ sont des ensembles finis. La somme double est :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{i,j} \right) \quad (\text{Théorème de Fubini})$$

Exemple 1.1.4.3 (*Somme triangulaire*)

Calculer $S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$. On peut écrire cette somme comme une somme double et intervertir l'ordre de sommation :

$$S = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \left(\sum_{i=1}^j i \right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n(n+3)}{4}$$

2 Produits (Π)

2.1 Définition et propriétés

📖 Définition 2.2.1.3

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de \mathbb{C} avec $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ un ensemble fini. On note le **produit** des éléments de cette famille par :

$$\prod_{i \in I} a_i = a_{i_1} \times a_{i_2} \times \dots \times a_{i_n}$$

Si $I = \{1, \dots, n\}$, alors :

$$\prod_{i \in I} a_i = \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{1 \leq i \leq n} a_i$$

✎ Exemple 2.2.1.4

1. **Factorielle** : $\prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \dots \times n = n!$
2. **Produit et somme** : $\prod_{k=1}^n 2^k = 2^{\sum_{k=1}^n k} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

✔ Propriété 2.2.1.3

1. $\prod_{i=1}^n (\lambda a_i) = \lambda^n \prod_{i=1}^n a_i$. Plus généralement, $\prod_{i \in I} (\lambda a_i) = \lambda^{\text{card}(I)} \prod_{i \in I} a_i$.
2. Si $I \cap J = \emptyset$, alors $\prod_{k \in I \cup J} a_k = \left(\prod_{i \in I} a_i \right) \left(\prod_{j \in J} a_j \right)$. En particulier, pour $m > n$, $\prod_{i=1}^m a_i = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \left(\prod_{i=n+1}^m a_i \right)$.
3. **Changement d'indice** : $\prod_{i=1}^n a_{i+p} = \prod_{k=p+1}^{n+p} a_k$.
4. **Produit télescopique** : Si $\forall i \in \{p, \dots, n\}, a_i \neq 0$, alors :

$$\prod_{i=p}^n \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$$

5. $\prod_{i \in I} (a_i b_i) = \left(\prod_{i \in I} a_i \right) \left(\prod_{i \in I} b_i \right)$.

Remarque 2.2.1.4

Attention à ne pas confondre les propriétés des sommes et des produits. En général :

$$\sum_{i \in I} a_i b_i \neq \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{i \in I} b_i \right)$$

En effet, le membre de droite correspond à une somme double : $(\sum_{i \in I} a_i) (\sum_{j \in I} b_j) = \sum_{(i,j) \in I^2} a_i b_j$.

2.2 Exercices sur les produits

Exercice 2.2.2.2

- Calculer $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.
- Calculer $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$ à l'aide des factorielles.
- (Intégrales de Wallis) Soit $n \geq 0$, on pose $U_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$.
 - Calculer U_0 et U_1 .
 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$.
 - En déduire U_{2n} et U_{2n+1} en fonction de n .

Preuve (Solutions (Partielles))

1. Produit télescopique :

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k \cdot k} = \left(\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \right) \left(\prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n} \right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} \right) = \left(\frac{1}{n} \right) \cdot \left(\frac{n+1}{2} \right) = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

2. Utilisation des factorielles :

$$\prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} = \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1) \cdot \prod_{k=1}^n (2k+1)}{(\prod_{k=1}^n 2k)^2}$$

On a $\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ et $\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n n!$. De même, $\prod_{k=1}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$. Le produit vaut donc :

$$\frac{\frac{(2n)!}{2^n n!} \cdot \frac{(2n+1)!}{2^n n!}}{(2^n n!)^2} = \frac{(2n)!(2n+1)!}{2^{4n} (n!)^4} = \frac{2n+1}{4^{2n}} \binom{2n}{n}^2$$

3. Intégrales de Wallis :

a) $U_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}$.

$$U_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1.$$

b) On effectue une intégration par parties sur $U_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t) \sin(t) dt$.

$$\begin{aligned} \text{Posons } u(t) = \sin^{n+1}(t) &\implies u'(t) = (n+1) \cos(t) \sin^n(t) \\ \text{et } v'(t) = \sin(t) &\implies v(t) = -\cos(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{n+2} &= [-\sin^{n+1}(t) \cos(t)]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^n(t) dt \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(t)) \sin^n(t) dt \\ &= (n+1)(U_n - U_{n+2}) \end{aligned}$$

D'où $(n+2)U_{n+2} = (n+1)U_n$, et donc $U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}U_n$.

c) Par récurrence, on obtient :

$$U_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} U_0 = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2 \cdot 4^n} \binom{2n}{n}$$

$$U_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} U_1 = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{4^n}{(2n+1) \binom{2n}{n}}$$

■

3 Systèmes linéaires

3.1 Généralités

3.1.1 Définition d'un système

Définition 3.3.1.4

Un système de n équations linéaires à p inconnues (x_1, \dots, x_p) est de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Les coefficients (a_{ij}) pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ et les seconds membres (b_i) pour $1 \leq i \leq n$ sont des constantes connues.

Exemple 3.3.1.5

Pour $n = p = 2$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Application 3.3.1.1 (Position de deux droites dans le plan)

Un système de deux équations à deux inconnues peut être interprété comme l'intersection de deux droites (D_1) et (D_2) :

$$\begin{cases} (D_1) : \alpha x + \beta y = \gamma \\ (D_2) : ax + by = c \end{cases}$$

- Si (D_1) rencontre (D_2) en un point (x_0, y_0) , le système (L) admet une **solution unique** : $S_{(L)} = \{(x_0, y_0)\}$.

- ▶ Si (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles, le système (L) n'admet **aucune solution** : $S_{(L)} = \emptyset$.
- ▶ Si $(D_1) = (D_2)$, le système (L) admet une **infinité de solutions** (les points de la droite) : $S_{(L)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha x + \beta y = \gamma\}$.

 **Exemple 3.3.1.6 (Exemples triviaux)**

$$(L_1) : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad (L_2) : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = 3 \end{cases} \quad (L_3) : \begin{cases} x - y = 1 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$$

3.1.2 Résolution d'un système linéaire

 **Proposition 3.3.1.3**

Pour résoudre un système linéaire, on cherche à le transformer en un système **équivalent** (ayant les mêmes solutions) et "plus simple", c'est-à-dire un **système triangulaire** ou, dans le cas général, un **système échelonné**.

 **Définition 3.3.1.5 (Système triangulaire)**

Un système est dit **triangulaire** si tous les coefficients sous la diagonale principale sont nuls. Par exemple :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ & a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Un tel système se résout en utilisant la "méthode de la remontée".

 **Définition 3.3.1.6 (Système échelonné)**

Un **système échelonné** est un système linéaire dont chaque équation (ou ligne) commence par strictement plus de zéros que la précédente. Par exemple :

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \cdots + \alpha_{1n}x_n & = \gamma_1 \\ 0 & + & 0 & + \alpha_{23}x_3 + \cdots + \alpha_{2n}x_n & = \gamma_2 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + \alpha_{34}x_4 + \cdots & = \gamma_3 \\ \ddots & & & & & & \end{cases}$$

★ **Théorème 3.3.1.4 (Opérations élémentaires (Pivot de Gauss))**

Les opérations suivantes permettent de passer d'un système à un autre qui lui est équivalent :

1. **Permutation** de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$ (avec $i \neq j$).
2. **Multiplication** d'une ligne par un scalaire non nul α : $L_i \leftarrow \alpha L_i$ (avec $\alpha \neq 0$).
3. **Ajout** à une ligne d'un multiple d'une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (avec $i \neq j$).

✎ **Exemple 3.3.1.7 (Résolution par pivot de Gauss)**

1. Soit le système :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 8 \end{cases} \xrightarrow[\text{L3} \leftarrow \text{L3} - 3\text{L1}]{\text{L2} \leftarrow \text{L2} - \text{L1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - 4x_3 = -3 \\ -x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{L3} \leftarrow \text{L3} + \text{L2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - 4x_3 = -3 \\ -2x_3 = -1 \end{cases}$$

Par remontée, on trouve $x_3 = 1/2$, puis $x_2 = -1$, et enfin $x_1 = 3$. D'où $S = \{(3, -1, 1/2)\}$.

2. Soit le système :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Après résolution, on trouve une infinité de solutions : $S = \{(2, 1 + t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

3.2 Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n

☰ **Définition 3.3.2.7 (Structure de \mathbb{R}^n)**

On munit l'ensemble \mathbb{R}^n de deux lois :

- ▶ L'addition vectorielle : $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.
- ▶ La multiplication par un scalaire : $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.

☰ **Définition 3.3.2.8 (Sous-espace vectoriel)**

Une partie non vide $F \subseteq \mathbb{R}^n$ est un **sous-espace vectoriel** (s.e.v.) de \mathbb{R}^n si elle est stable par combinaison linéaire :

$$\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad x + \lambda y \in F$$

Cela équivaut à vérifier deux conditions :

1. Le vecteur nul $\vec{0} = (0, \dots, 0)$ appartient à F .
2. F est stable par addition et multiplication par un scalaire.

☰ Définition 3.3.2.9 (S.E.V. engendré par une famille de vecteurs)

Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ des vecteurs de \mathbb{R}^n . L'ensemble de toutes leurs combinaisons linéaires est un s.e.v. de \mathbb{R}^n , appelé **sous-espace vectoriel engendré** par la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$. On le note :

$$\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{v}_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}$$

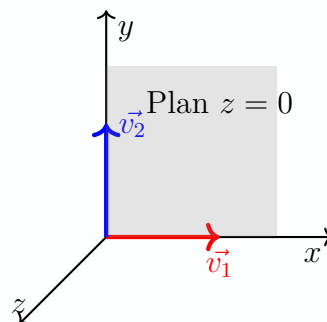
C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) s.e.v. de \mathbb{R}^n contenant tous les vecteurs \vec{v}_i .

✎ Exemple 3.3.2.8

Dans \mathbb{R}^3 , considérons $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ et $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)$.

$$\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \{ \lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} = \{ (\lambda_1, \lambda_2, 0) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$$

C'est le plan horizontal d'équation $z = 0$.



☰ Définition 3.3.2.10 (Famille libre et liée)

Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est dite :

- ▶ **libre** si la seule façon d'obtenir le vecteur nul comme combinaison linéaire est de choisir tous les coefficients nuls.

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$$

- ▶ **liée** si elle n'est pas libre. Cela signifie qu'au moins un des vecteurs peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

☰ Définition 3.3.2.11 (Base et Dimension)

Soit F un s.e.v. de \mathbb{R}^n .

- ▶ Une famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est une **famille génératrice** de F si $F = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$.
- ▶ Une **base** de F est une famille génératrice de F qui est également libre.
- ▶ Toutes les bases d'un s.e.v. F ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est appelé la **dimension** de F , notée $\dim(F)$.

3.3 Sous-espaces affines et structure des solutions

☰ Définition 3.3.3.12 (Sous-espace affine)

Soit F un s.e.v. de \mathbb{R}^n et \vec{a} un vecteur de \mathbb{R}^n . L'ensemble

$$\mathcal{A} = \vec{a} + F = \{\vec{a} + \vec{v} \mid \vec{v} \in F\}$$

est appelé un **sous-espace affine** passant par \vec{a} et de direction F . Sa dimension est celle de sa direction : $\dim(\mathcal{A}) = \dim(F)$.

💡 Proposition 3.3.3.4 (Non-unicité du point de passage)

La point de passage d'un sous-espace affine n'est pas unique. Si $\mathcal{A} = \vec{a} + F$, alors pour tout point $\vec{b} \in \mathcal{A}$, on a aussi $\mathcal{A} = \vec{b} + F$.

🔍 Preuve

Soit $\vec{b} \in \mathcal{A}$. Par définition, il existe un vecteur $\vec{v}_1 \in F$ tel que $\vec{b} = \vec{a} + \vec{v}_1$.

- ▶ Montrons que $\mathcal{A} \subseteq \vec{b} + F$. Soit $\vec{x} \in \mathcal{A}$. Il existe $\vec{v}_2 \in F$ tel que $\vec{x} = \vec{a} + \vec{v}_2$. Comme $\vec{a} = \vec{b} - \vec{v}_1$, on a $\vec{x} = (\vec{b} - \vec{v}_1) + \vec{v}_2 = \vec{b} + (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$. Puisque F est un s.e.v., $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 \in F$, donc $\vec{x} \in \vec{b} + F$.
- ▶ Montrons que $\vec{b} + F \subseteq \mathcal{A}$. Soit $\vec{x} \in \vec{b} + F$. Il existe $\vec{v}_3 \in F$ tel que $\vec{x} = \vec{b} + \vec{v}_3$. En remplaçant \vec{b} , on a $\vec{x} = (\vec{a} + \vec{v}_1) + \vec{v}_3 = \vec{a} + (\vec{v}_1 + \vec{v}_3)$. Comme $\vec{v}_1 + \vec{v}_3 \in F$, on a $\vec{x} \in \mathcal{A}$.

Les deux inclusions prouvent l'égalité. ■

★ Théorème 3.3.3.5 (Unicité de la direction)

La direction d'un sous-espace affine est unique. Si $\mathcal{A} = \vec{a}_1 + F_1 = \vec{a}_2 + F_2$, alors $F_1 = F_2$.

Q Preuve

On a $\vec{a}_2 \in \mathcal{A} = \vec{a}_1 + F_1$, donc il existe $\vec{v}_1 \in F_1$ tel que $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{v}_1$, d'où $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = -\vec{v}_1 \in F_1$. De même, $\vec{a}_1 \in \mathcal{A} = \vec{a}_2 + F_2$, donc $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 \in F_2$.

► Soit $\vec{x} \in F_2$. Alors $\vec{a}_2 + \vec{x} \in \mathcal{A} = \vec{a}_1 + F_1$. Il existe donc $\vec{v}' \in F_1$ tel que $\vec{a}_2 + \vec{x} = \vec{a}_1 + \vec{v}'$. On en déduit $\vec{x} = (\vec{a}_1 - \vec{a}_2) + \vec{v}'$. Comme $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 \in F_1$ et $\vec{v}' \in F_1$, leur somme \vec{x} est dans F_1 . Donc $F_2 \subseteq F_1$.

► L'argument est symétrique : en partant de $\vec{x} \in F_1$, on montre de la même manière que $\vec{x} \in F_2$, donc $F_1 \subseteq F_2$.

Par double inclusion, $F_1 = F_2$. ■

✎ Exemple 3.3.3.9

1. Soit $\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$. Un point $(x, y, z) \in \mathcal{A}$ vérifie $z = 1 - x - y$. On peut donc l'écrire :

$$(x, y, 1 - x - y) = (0, 0, 1) + (x, y, -x - y) = (0, 0, 1) + x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$$

Ainsi, $\mathcal{A} = \vec{a} + \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ avec $\vec{a} = (0, 0, 1)$, $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$ et $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$. \mathcal{A} est un sous-espace affine de dimension 2 (un plan).

2. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 1\}$. C'est la droite affine d'équation $x = 1 + 2y$. On peut écrire un point de D :

$$(1 + 2y, y) = (1, 0) + y(2, 1)$$

Ainsi, $D = (1, 0) + \text{Vect}((2, 1))$. C'est une droite affine.

3.3.1 Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire**★ Théorème 3.3.3.6**

Soit (L) un système linéaire et \mathcal{A} l'ensemble de ses solutions.

- Soit \mathcal{A} est vide ($\mathcal{A} = \emptyset$).
- Soit \mathcal{A} est un sous-espace affine $\mathcal{A} = \vec{x}_p + F$, où :
 - ▷ \vec{x}_p est une **solution particulière** de (L) .
 - ▷ F est le s.e.v. des solutions du **système homogène associé** (H) , où tous les seconds membres sont nuls.

Q Preuve

Soit le système $(L) : \sum_{j=1}^p a_{ij}x_j = b_i$ et le système homogène associé $(H) :$

$\sum_{j=1}^p a_{ij}x_j = 0$. Notons F l'ensemble des solutions de (H) .

1. Montrons que F est un s.e.v. de \mathbb{R}^p .

- ▶ Le vecteur nul $\vec{0}$ est dans F car $\sum a_{ij} \cdot 0 = 0$.
- ▶ Soient $\vec{y}, \vec{y}' \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\sum_{j=1}^p a_{ij}(y_j + \lambda y'_j) = \sum_{j=1}^p a_{ij}y_j + \lambda \sum_{j=1}^p a_{ij}y'_j = 0 + \lambda \cdot 0 = 0$. Donc $\vec{y} + \lambda \vec{y}' \in F$.

2. Montrons que $\mathcal{A} = \vec{x}_p + F$, en supposant que \mathcal{A} n'est pas vide et que \vec{x}_p est une solution particulière de (L) . Soit $\vec{x} \in \mathcal{A}$. On a donc $\sum a_{ij}x_j = b_i$ et $\sum a_{ij}(x_p)_j = b_i$. En soustrayant les deux équations, on obtient : $\sum a_{ij}(x_j - (x_p)_j) = 0$. Ceci signifie que le vecteur $\vec{x} - \vec{x}_p$ est une solution du système homogène, donc $\vec{x} - \vec{x}_p \in F$. On a donc $\vec{x} \in \vec{x}_p + F$. L'égalité est démontrée par équivalences successives. ■

Exemple 3.3.3.10

Résoudre le système (L) :
$$\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ 2x + y + 2z + t = 6 \\ 3x + 2y + 3z + 2t = 10 \end{cases} .$$

- ▶ **Solution particulière** : On remarque que $\vec{a} = (1, 1, 1, 1)$ est une solution particulière de (L) .
- ▶ **Résolution du système homogène (H)** :

$$(H) : \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x + y + 2z + t = 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2t = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{L3} \leftarrow \text{L3} - 3\text{L1}]{\text{L2} \leftarrow \text{L2} - 2\text{L1}} \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -y - t = 0 \\ -y - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont de la forme $(x, y, -x, -y)$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de (H) est $F = \{x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ avec $\vec{v}_1 = (1, 0, -1, 0)$ et $\vec{v}_2 = (0, 1, 0, -1)$.

- ▶ **Solution générale de (L)** : L'ensemble des solutions de (L) est $\mathcal{A} = \vec{a} + F = \{(1, 1, 1, 1) + x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

3.3.2 Exercices d'application

Exercice 3.3.3.3

Résoudre les systèmes suivants :

1. Dans \mathbb{R}^n : $(L_1) \quad \left\{ \sum_{k=1}^i x_k = 2^{i+1} - 2 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \right.$
2. Dans \mathbb{R}^{n+1} : $(L_2) \quad \left\{ \sum_{k=0}^n C_k^i x_k = b_i \quad \forall i \in \{0, \dots, n\} \right.$

Q Preuve (Solutions)

1. Pour (L_1) , on procède par soustraction. Pour $i \geq 2$:

$$x_i = \left(\sum_{k=1}^i x_k \right) - \left(\sum_{k=1}^{i-1} x_k \right) = (2^{i+1} - 2) - (2^i - 2) = 2^{i+1} - 2^i = 2^i$$

Pour $i = 1$, $x_1 = 2^{1+1} - 2 = 2$. La formule $x_i = 2^i$ fonctionne aussi. La solution unique est donc $S = \{(2^1, 2^2, \dots, 2^n)\}$.

2. Pour (L_2) , le système est triangulaire car $\binom{k}{i} = 0$ si $k < i$. On peut l'écrire $\sum_{k=i}^n \binom{k}{i} x_k = b_i$. Le système homogène associé a pour unique solution le vecteur nul (par récurrence descendante). Il existe donc une unique solution au système (L_2) . L'idée est de poser un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, où (a_0, \dots, a_n) est la solution recherchée. On montre que $P(X+1) = \sum_{i=0}^n b_i X^i$. En posant $Q(X) = \sum b_i X^i$, on a $P(X) = Q(X-1)$. Par identification des coefficients de $P(X) = \sum_{j=0}^n b_j (X-1)^j$, on trouve la solution unique :

$$a_k = \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{j}{k} b_j \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

■